Relative Häufigkeiten

Beispiel: Auftretende Augenzahlen beim 30-maligen Werfen eines Würfels

2415651565 5166123653 2541232123

Ereignis	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
absolute Häufigkeit	6	6	4	2	7	5
relative Häufigkeit	$\frac{6}{30}=0{,}2$	$\frac{6}{30}=0{,}2$	$\frac{4}{30}\approx 0{,}13$	$\frac{2}{30}\approx 0{,}07$	$\frac{7}{30}\approx 0{,}23$	$\frac{5}{30}\approx 0{,}17$

Tritt das Ereignis A in einer Serie von n Versuchen z-mal ein, so heißt die Zahl

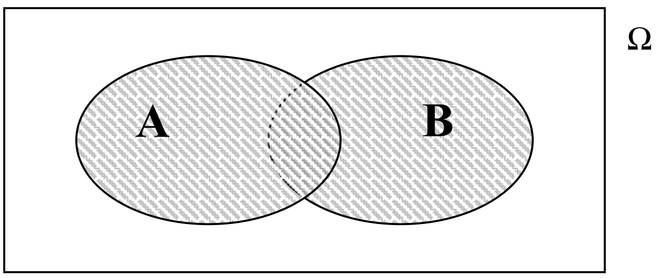
$$h(A)=\frac{z}{n}=\frac{\text{Anzahl der Versuche, bei denen A eintritt}}{\text{Gesamtanzahl der Versuche}}$$

die relative Häufigkeit von A in dieser Serie.

Eigenschaften der relativen Häufigkeiten:

Es sei Ω der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments. Dann gilt:

1. Für die relative Häufigkeit eines Ereignisses A gilt $h(A)\in[0;1]$.
   Speziell gilt dabei $h(\{\ \})=0$ und $h(\Omega)=1$.
2. Die relative Häufigkeit für das Eintreten eines Ereignisses ist die Summe der relativen Häufigkeiten der zugehörigen Elementarereignisse.
3. Addiert man die relativen Häufigkeiten aller Elementarereignisse, so erhält man 1.
4. $h(A\cup B)=h(A)+h(B)-h(A\cap B)$



Sonderfall: Sind A und B unvereinbar, d.h. $A\cap B=\emptyset$, dann gilt $h(A\cup B)=h(A)+h(B)$.

Folgerung: $h(\overline{A})=1-h(A)$ $\quad h(A)=1-h(\overline{A})$

Beispiel:

Ein Würfel wird 30-mal geworfen (siehe Eingangsbeispiel). Ermitteln Sie die relativen Häufigkeiten $h(A)$, $h(B)$, $h(A \cup B)$ und $h(\overline{A})$ der Ereignisse A: „Augenzahl ungerade“ und B: „Augenzahl ist Primzahl“.

$$A = \{1,3,5\} \quad \Rightarrow h(A) = \frac{6}{30} + \frac{4}{30} + \frac{7}{30} = \frac{17}{30}$$

$$B = \{2,3,5\} \quad \Rightarrow h(B) = \frac{6}{30} + \frac{4}{30} + \frac{7}{30} = \frac{17}{30}$$

$$A \cap B = \{3,5\} \quad \Rightarrow h(A \cap B) = \frac{4}{30} + \frac{7}{30} = \frac{11}{30}$$

$$h(A \cup B) = h(A) + h(B) - h(A \cap B) = \frac{17}{30} + \frac{17}{30} - \frac{11}{30} = \frac{23}{30}$$

$$h(\overline{A}) = 1 - h(A) = 1 - \frac{17}{30} = \frac{13}{30}$$

Das empirische Gesetz der großen Zahlen

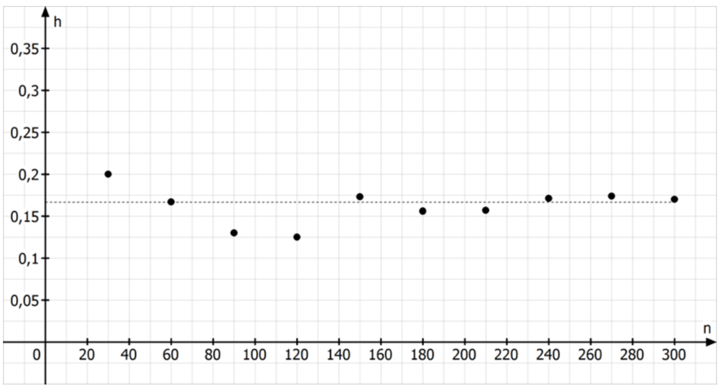
Beispiel:

Es soll untersucht werden, wie sich beim Würfeln die relative Häufigkeit des Ereignisses „Augenzahl 1“ bei zunehmender Anzahl der Versuche verändert.

2415651565	5166123653	2541232123
2525326655	3626514566	1416412355
2634252456	6432135231	6263235562
5553312263	5551521322	4425534643
1235664111	6311153311	2531144453
5533624245	1254236565	1265436623
1234455612	6524161431	2365345655
3151162336	1642525626	2144121216
4124616315	2323664241	1454231365
2436163224	6146364252	5162426215

Anzahl der Versuche	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
Absolute Häufigkeit	6	10	12	15	26	28	33	41	47	51
Relative Häufigkeit	0,2	0,167	0,13	0,125	0,173	0,156	0,157	0,171	0,174	0,17

Graphische Veranschaulichung:



Empirisches Gesetz der großen Zahlen:

Bei langen Versuchsreihen stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten eines bestimmten Ereignisses bei einer festen Zahl.

Bemerkung:

Die Zahl, bei der sich die relative Häufigkeit h(A) eines Ereignisses A für große n stabilisiert, nennt man auch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.